Übungsklausur Integralrechnung – Schneefall
Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Bestimme eine Stammfunktion der Funktion f.

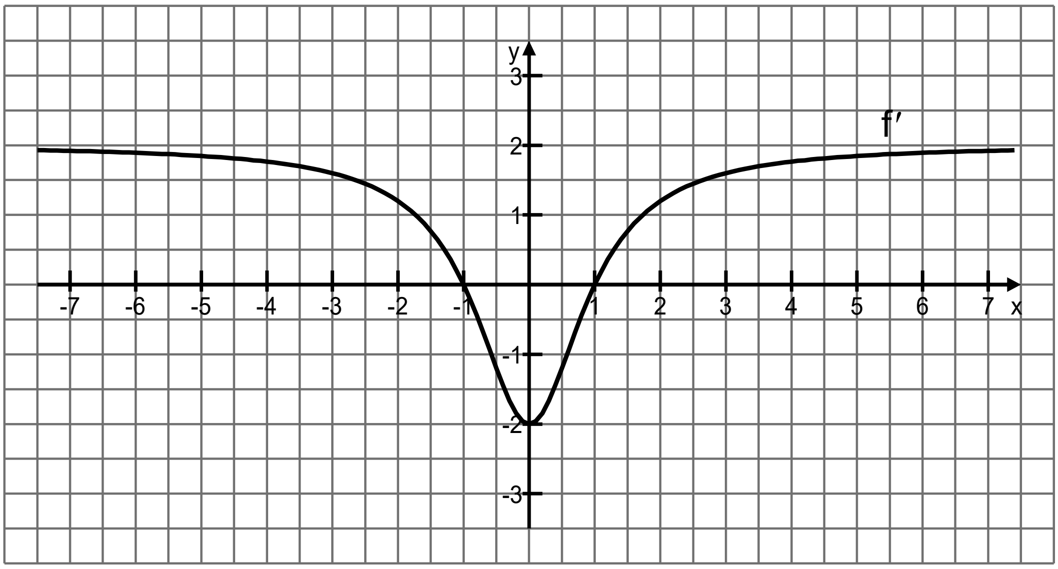
   a) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{x}{2} - 1$ b) $f(x) = (3x-1)^2$

2) Zeichne die Schaubilder der Funktionen $f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = -x^2 + 1$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem. Berechne die Fläche, die von den Schaubildern eingeschlossen wird.

3) Das Schaubild der Funktion $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2$ besitzt einen Wendepunkt. Die Tangente im Wendepunkt begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Bestimme den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

4) Löse die Gleichung $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

5) Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion $f'(x)$ einer Funktion f(x).



   a) Welche Aussagen kann man über
      - Hoch- und Tiefpunkte
      - Wendepunkte

      der Funktion f(x) machen? Begründe Deine Antworten.

   b) Skizziere mit Hilfe von Aufgabe a) das Schaubild der Funktion f(x), das durch den Punkt P(0|1) verläuft.

Übungsklausur Integralrechnung – Schneefall
Wahlteil (mit WTR und Merkhilfe)

Die Schneehöhe in einem Skigebiet beträgt zu Beginn eines Wintertages 10 cm.
Die Schneefallrate während dieses Tages wird modellhaft beschrieben durch die Funktion f(t) mit

$$f(t) = 0{,}0004t^4 - 0{,}02t^3 + 0{,}25t^2$$

(t in Stunden seit Tagesbeginn, f(t) in cm pro Stunde).

a) (1) Skizziere das Schaubild von f(t) für die ersten 24 Stunden in einem Koordinatensystem.
   (2) Wie groß ist die Schneefallrate nach 6 Stunden?
   (3) Berechne den Zeitpunkt, an dem es am stärksten schneit.

b) (1) Bestimme den Funktionsterm F(t), der angibt wie hoch der Schnee nach t Stunden liegt.
   (2) Wie hoch liegt der Schnee zu Tagesbeginn (0 Uhr) und nach 24 Stunden (24Uhr)?

Weiter unten im Tal ist die Schneefallrate gleich aber höhere Temperaturen tragen dazu bei, dass der Schnee von Anfang an schmilzt.
Die Schmelzrate wird durch eine Funktion g mit

$$g(t) = -0{,}01t^2 + 0{,}2t + 2 \text{ modelliert}$$

(t in Stunden seit Tagesbeginn, g(t) in cm pro Stunde).

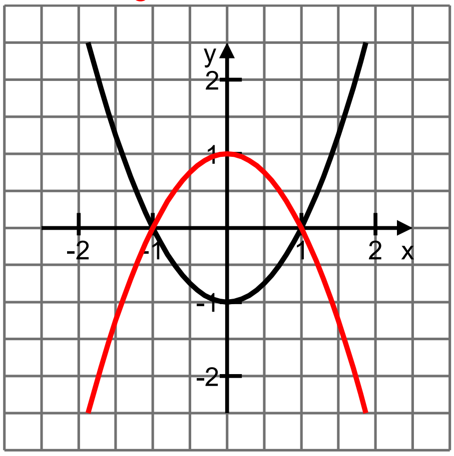
c) (1) Skizziere das Schaubild der Funktion g im vorhandenen Koordinatensystem.
   (2) Markiere im Koordinatensystem den Zeitpunkt, ab dem die Schneehöhe erstmals zunimmt.

Übungsklausur Integralrechnung – Schneefall

Lösungen Pflichtteil:

1) a) $F(x) = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - x$ b) $F(x) = \frac{1}{9}(3x-1)^3$

2) Zeichnung

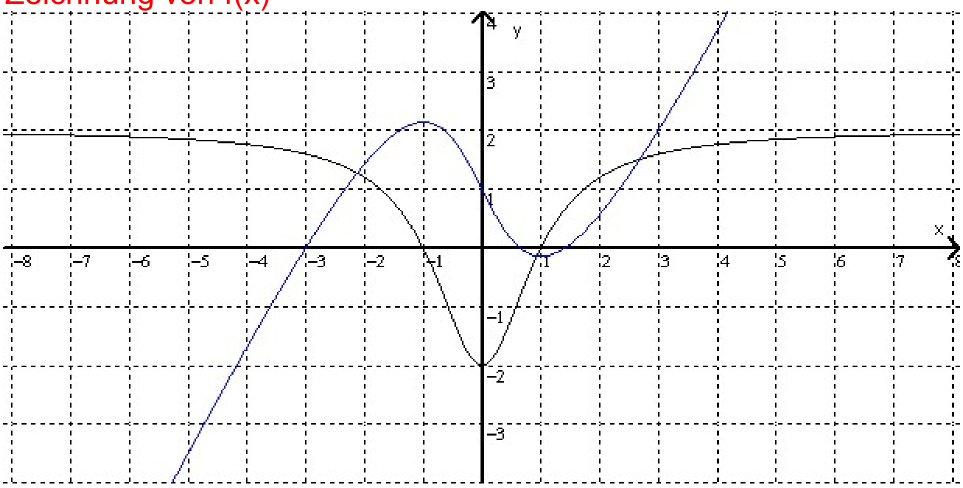


$$\int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))dx = \int_{-1}^{1}(2-2x^2)dx = \left[2x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = 2 - \frac{2}{3} - \left(-2 + \frac{2}{3}\right) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

3) $f'(x) = -3x^2 - 6x$; $f''(x) = -6x - 6$
$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1$
Tangente: $\Rightarrow f'(-1) = -3 + 6 = 3 \Rightarrow t(x) = 3x + c$
Bestimmung von c: $f(-1) = 0 \Rightarrow 0 = -3 + c \Rightarrow c = 3$
Fläche: $A = 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$FE

4) $x^2 = z \Leftrightarrow z^2 - 3z - 4 = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = 4 \quad z_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = -1$
$\Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow$ k.L. $\quad x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$

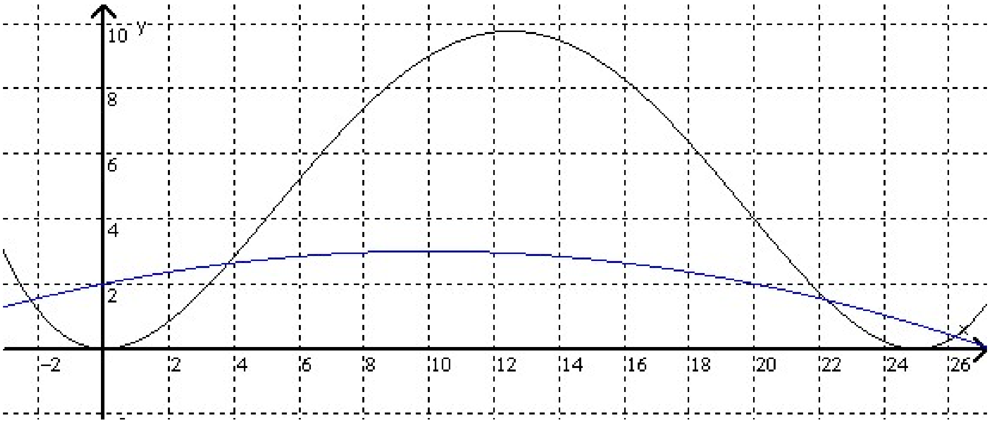
5) a) Hochpunkt bei $x = -1$,da das Schaubild von f' die x-Achse von oben schneidet und Tiefpunkt bei $x = 1$, da hier die x-Achse von unten nach oben geschnitten wird. f hat an der Extremstelle von f' einen Wendepunkt. Also bei $x = 0$.
b) Zeichnung von f(x)



Übungsklausur Integralrechnung – Schneefall

Lösungen Wahlteil:

a) (1) Skizze f(t)



(2) $f(6) = 5{,}20 \Rightarrow 5{,}20\,\text{cm} / \text{Stunde}$

(3) $f'(t) = 0{,}0016t^3 - 0{,}06t^2 + 0{,}5t$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 0{,}0016t^3 - 0{,}06t^2 + 0{,}5t = 0 \Rightarrow \boxed{t_1 = 0}$

$0{,}0016t^2 - 0{,}06t + 0{,}5 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 37{,}5 + 312{,}5 = 0$

$t_{1/2} = 18{,}75 \pm \sqrt{\frac{5625}{16} - 312{,}5} = 18{,}75 \pm \sqrt{\frac{5625}{16} - 312{,}5} = 18{,}75 \pm 6{,}25$

$t_1 = 25 \;\; \text{oder} \;\; t_2 = 12{,}5$

$f''(t) = 0{,}0048t^2 - 0{,}12t + 0{,}5$

$f''(25) = 0{,}0048 \cdot 25^2 - 0{,}12 \cdot 25 + 0{,}5 = 0{,}5 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } t_1 = 25$

$f''(12{,}5) = 0{,}0048 \cdot 12{,}5^2 - 0{,}12 \cdot 12{,}5 + 0{,}5 = -0{,}25 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } t_2 = \boxed{12{,}5}$

$\Rightarrow$ Nach 12,5 Stunden schneit es am stärksten.

b) (1) $F(t) = 0{,}00008t^5 - 0{,}005t^4 + \frac{1}{12}t^3 + 10$

(2) F(0) = 10; F(24)= 140,13 $\Rightarrow$ 140,13cm

c) (1) Skizze siehe a)

(2) Erster Schnittpunkt von f(t) und g(t) bei $t \approx 4$